Année 2002-2003

Rattrapage : Mécanique Rationnelle
Durée : 02 heures

Exercice 01 : (10 pts)

1) Déterminer par le théorème de Guldin la surface latérale de l'enveloppe cônique mince obtenue par la rotation autour de l'axe ***(Oz)*** de la barre ***AB*** de longueur ***L (voir figure 01)***. Retrouver cette valeur par intégration.
2) Déterminer le tenseur d'inertie en ***O*** du corps homogène obtenu par la rotation autour de l'axe **Oz** de la barre coudée **OAB** de la **figure 2.**

On posera : m_1 = masse du disque

m_2 = masse de l'enveloppe conique

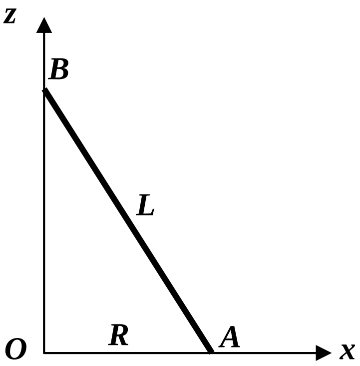


Figure :01

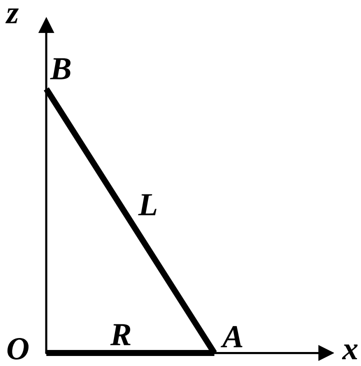


Figure :02

Exercice 02: (10 pts) **Simulateur de vol**

Pour simuler les conditions de vol des avions, les ingénieurs ont conçu un appareil spécial pour l'entraînement des pilotes qui consiste en **un bras *(1)*** en rotation dans le plan horizontal tel que : $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$:repère mobile lié au bras, avec $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=\psi$ sens positif ;

Un cockpit (2) en rotation autour de l'axe $\vec{x}_1$ tel que $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)=\theta$ sens positif ; $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$: repère lié au cockpit avec ***OB = R.***

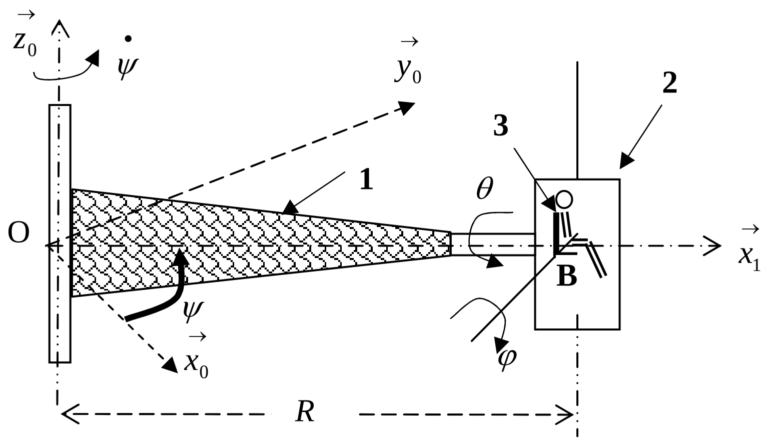
Un siège-pilote ***(3)*** en rotation autour de l'axe $\vec{y}_2$ tel que : $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif. $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: repère lié au siège-pilote. Le pilote est lié au siège, sa tête est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{BT} = L\,\vec{z}_3$.

Tous ces éléments sont en rotation contrôlée par l'ordinateur pour simuler les différentes manœuvres. Il a fallu faire des calculs pour déterminer les paramètres cinématiques afin de les varier de façon sensée pour savoir à quelles accélérations seront soumis les pilotes.

Vous êtes l'ingénieur responsable de ces calculs, il vous est demandé de :

1) Etablir les figures planes représentatives des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;
2) Trouver le vecteur position du point ***T***, ainsi que le vecteur rotation du siège pilote par rapport à R_0;
3) Déterminer le vecteur vitesse absolue du point ***T*** par composition de mouvement et par la cinématique du solide.
4) Déterminer l'accélération absolue du point ***T*** par composition de mouvement.

On prendra R_2 comme repère de projection



Solution :

Exercice 01 : (10 pts)

1) Surface Latérale :

a) par le théorème de Guldin

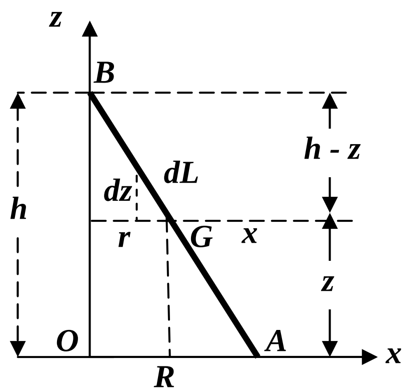


Figure :01

$$S = 2\pi.\, R_G.\, L \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \quad ;$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} R/2 \\ h/2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad R_G = CG = \frac{R}{2}$$

Alors : $S = 2\pi.\frac{R}{2}.\, L = \pi.R.L$

b) par intégration

L'élément d'intégration est donné par : $ds = 2\pi.r.dL$

Les triangles OAB et CGB sont semblables, nous avons : $\frac{CG}{OA} = \frac{CB}{OB} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h-z}{h}$

Nous avons aussi : $\frac{dz}{dL} = \frac{h}{L} \Rightarrow dL = \frac{L}{h}dz$ et $h^2 + R^2 = L^2$

$$ds = 2\pi.rdL = 2\pi\frac{R(h-z)}{h}.\frac{L}{h}dz \quad \Rightarrow \quad S = \frac{2\pi.R.L}{h^2}\int_0^h (h-z)dz$$

$$S = \frac{2\pi.R.L}{h^2}\left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right) = \pi.R.L$$

2) Tenseur d'inertie :

La rotation de la barre ***OA*** autour de l'axe ***Oz*** donne un disque de masse $\boldsymbol{m_1}$ de rayon ***R***, et la barre ***AB*** donne une enveloppe conique de masse $\boldsymbol{m_2}$. Le moment d'inertie du système est la somme des moments d'inertie des deux solides : $I_{O(Syst)} = I_{O(disque)} + I_{O(cône)}$

<u>Pour le disque :</u>

(xoz) et ***(yoz)*** sont des plans de symétrie : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Les axes Ox et Oy jouent le même rôle alors : $I_{xx} = I_{yy}$; de plus nous avons un solide plan alors : $I_{xx} + I_{yy} = I_{zz} \quad \Rightarrow \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2}$

$$I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)dm = \frac{m_1R^2}{2} \quad \Rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{m_1R^2}{4} \quad ; \quad I_{O(disque)} = \begin{bmatrix} \frac{m_1R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1R^2}{2} \end{bmatrix}$$

Pour l'enveloppe conique : ***(Oz)*** est un axe de révolution

Les plans ***(xoz)*** et ***(yoz)*** sont des plans de symétrie : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Les axes ***Ox*** et ***Oy*** jouent le même rôle alors : $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)dm = \int_S r^2 dm = \int_S r^2\sigma.ds \;\; ; \text{ on a déjà } \; ds = 2\pi.rdL = \frac{2\pi.R.L}{h^2}(h-z)dz$$

$$I_{zz} = \int_S r^2\sigma.\frac{2\pi.R.L}{h^2}(h-z)dz = \sigma\int_S \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2.\frac{2\pi.R.L}{h^2}(h-z)dz = \sigma.\pi.R.L.\frac{R^2}{2} = \frac{m_2R^2}{2}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2} + \int_S z^2 dm \;\; ; \;\; \text{on calcul seulement l'intégrale: } \int_S z^2 dm$$

$$\int_S z^2 dm = \int_S z^2.\sigma.\frac{2\pi.R.L}{h^2}(h-z)dz = \sigma.\frac{2\pi.R.L}{h^2}.\frac{h^4}{12} = \frac{m_2h^2}{6}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m_2R^2}{4} + \frac{m_2h^2}{6}$$

$$I_{O(cône)} = \begin{bmatrix} \frac{m_2R^2}{4}+\frac{m_2h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2R^2}{4}+\frac{m_2h^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2R^2}{2} \end{bmatrix} \;\; ; \quad \text{avec : } \; h^2 = L^2 - R^2$$

$$I_{O(système)} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)\frac{R^2}{4}+\frac{m_2h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & (m_1+m_2)\frac{R^2}{4}+\frac{m_2h^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & (m_1+m_2)\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$$

Exercice 02 : (10 pts)

1. Figures planes des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;

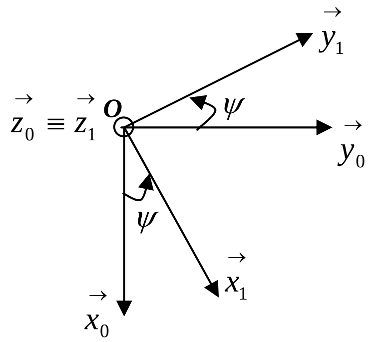
a) Rotation du bras

Nous avons : $OB = R$ et $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe. R_2 : étant le repère de projection on exprimera toute les données dans ce repère.

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: en rotation / à R_0 tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ sens positif

Matrice de passage de R_0 *vers* R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_0 \to R_1}} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

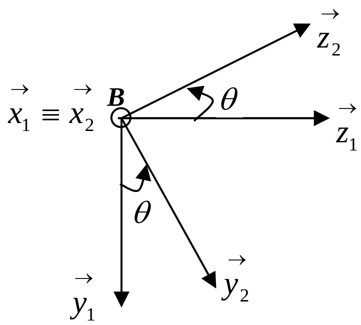


***a) Rotation du* cockpit**

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: en rotation / R_1 tel que $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ sens positif ;

Matrice de passage de R_1 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

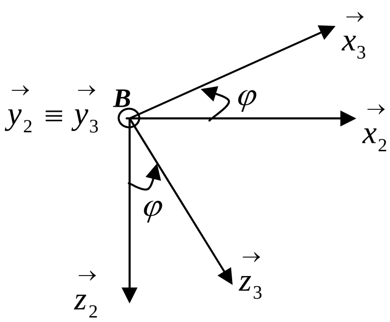


a) Rotation du siège pilote

$R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en rotation / tel que : $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif.

Matrice de passage de R_3 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{P_{R_3 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vecteur position du point T par rapport à R_0 exprimé dans R_2

Nous avons : $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$, sachant que $\overrightarrow{BT} = L\,\vec{z}_3$

$$\overrightarrow{OB} = \underset{R_1,R_2}{\begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \;;\; \overrightarrow{BT} = \underset{R_3}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}} \quad \text{d'où : } \overrightarrow{OT} = \underset{R_2}{\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}}$$

Vecteur rotation du siège pilote :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 \quad ;$$

Par la matrice de passage de R_1 vers R_2 le vecteur $\vec{z}_1$ 'écrit : $\vec{z}_1 = \sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\psi}\left(\sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2\right) = \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\vec{y}_2 + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{z}_2$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \underset{R_2}{\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}}$$

3. Vecteur vitesse du point T

3.1. Par composition de mouvement

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{ent} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(T) = \vec{V}^2(T) + \vec{V}_2^0(T)$$

La vitesse relative est donnée par : $\vec{V}^2(T) = \dfrac{d^2\,\overrightarrow{BT}}{dt} \underset{R_2}{\begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}}$

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}_2^0(T) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}$

$$\vec{V}_2^0(T) = \underset{R_2}{\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\left(R + L\sin\varphi\right) \\ -\dot{\psi}\sin\theta\left(R + L\sin\varphi\right) \end{cases}}$$

En faisant la somme on obtient :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

3.2. *Par la cinématique du solide*

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}^0(T) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT}$

Nous avons : $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\theta \\ -R\dot{\psi}\sin\theta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + L\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \end{cases}_{R_2}$$

La somme des deux expressions donne :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

4. Accélération absolue du point *T* par composition de mouvement

Son expression est donnée par la relation suivante : $\vec{\gamma}_{abs}(T) = \vec{\gamma}_{rel}(T) + \vec{\gamma}_{ent}(T) + \vec{\gamma}_{coriolis}(T)$

$$\vec{\gamma}^0(T) = \vec{\gamma}^2(T) + \vec{\gamma}_2^0(T) + \vec{\gamma}_c(T)$$

Explicitons chacun du terme de cette relation :

(1) : $\vec{\gamma}^2(T) == \dfrac{d^2\vec{V}^2(T)}{dt} \begin{cases} L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ 0 \\ -L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{\gamma}_2^0(T) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}\right)$$

$$\vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OT}=\frac{d^2\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OT}=\underset{R_2}{\begin{cases}\ddot{\theta}\\ \ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\ \ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}}\wedge\underset{R_2}{\begin{cases}R+L\sin\varphi\\ 0\\ L\cos\varphi\end{cases}}$$

$$\textbf{(2) :}\quad \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OT}=\underset{R_2}{\begin{cases}L\cos\varphi\left(\ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\\ L\ddot{\theta}\cos\varphi+(R+L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right)\\ -(R+L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\end{cases}}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OT}\right)=\underset{R_2}{\begin{cases}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{cases}}\wedge\underset{R_2}{\begin{cases}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{cases}}\wedge\underset{R_2}{\begin{cases}R+L\sin\varphi\\ 0\\ L\cos\varphi\end{cases}}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OT}\right)=\underset{R_2}{\begin{cases}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{cases}}\wedge\underset{R_2}{\begin{cases}L\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta\\ -L\dot{\theta}\cos\varphi+\dot{\psi}\cos\theta(R+L\sin\varphi)\\ -\dot{\psi}\sin\theta(R+L\sin\varphi)\end{cases}}$$

$$\textbf{(3) :}\quad \vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OT}\right)=\underset{R_2}{\begin{cases}-\dot{\psi}^2(R+L\sin\varphi)+L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta\\ \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta(R+L\sin\varphi)+L\dot{\psi}^2\cos\varphi\cos\theta\sin\theta\\ -L\dot{\theta}^2\cos\varphi+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta(R+L\sin\varphi)-L\dot{\psi}^2\cos\varphi\sin^2\theta\end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}_c(T)=2\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\vec{V}^2(T)\right)$$

$$\textbf{(4) :}\quad \vec{\gamma}_c(T)=2\underset{R_2}{\begin{cases}\dot{\theta}\\ \dot{\psi}\sin\theta\\ \dot{\psi}\cos\theta\end{cases}}\wedge\underset{R_2}{\begin{cases}L\dot{\varphi}\cos\varphi\\ 0\\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}}=\underset{R_2}{\begin{cases}-2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\\ 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi+2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi\\ -2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\end{cases}}$$

La somme de ces expressions donne l'accélération absolue du point T

$\vec{\gamma}^0(T)=$ **(1) +(2) +(3) + (4)**