Université de Boumerdès **Année 2007-2008**
Faculté des sciences
Département de physique

EMD02 : <u>Mécanique rationnelle</u> 02 juin 2008
<u>Durée : 01h30</u>

Soit un disque homogène (1), de centre C, de masse *M* et de rayon *R*. En un point A du disque est articulée une barre AB (2) ; mince, homogène, de centre d'inertie G_2 ,de masse m et de longueur *2L*, telle que : $AC = a = cste$.

Le disque roule sans glisser sur le sol (0) muni du repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le point de contact *I* entre le disque et le sol (0) est repéré par $\vec{OI} = x(t)\,\vec{x}_0$, où t est le paramètre temps.

On désigne par :

$R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: Repère lié au disque qui se déduit de R_0, par la rotation autour de l'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$, telle que $\left(\vec{x}_0, \vec{x}_1\right) = \left(\vec{y}_0, \vec{y}_1\right) = \theta(t)$

$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: Repère lié à la barre qui se déduit de R_1, par la rotation autour de l'axe $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$, telle que $\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = \left(\vec{y}_1, \vec{y}_2\right) = \varphi(t)$

On choisira R_1 comme repère <u>relatif</u> et de <u>projection</u> R_0 étant le repère <u>absolu</u>.

A : <u>Cinématique</u> : (*9 Points*)

Déterminer :

A-1 : les vitesses de rotation des deux solides par rapport à R_0 ;

A-2 : la vitesse du point *C*, par rapport à R_0, par dérivation ;

A-3 : la vitesse du point *A*, par rapport à R_0, par la cinématique du solide ;

A-4: la condition de roulement sans glissement du disque sur le sol en I ;

A-5 : les vitesses relative, d'entraînement et absolue du centre de masse G_2 de la barre ;

A-6 : les accélérations relative et de Coriolis de G_2 .

B : <u>Géométrie des masses</u> : (*4 Points*)

B-1 : Donner la matrice d'inertie du disque au point C dans R_1 ;

B-2 : Ecrire la matrice d'inertie de la barre au point A dans R_2 ;

B-3 : En déduire le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe $\left(A, \vec{x}_1\right)$.

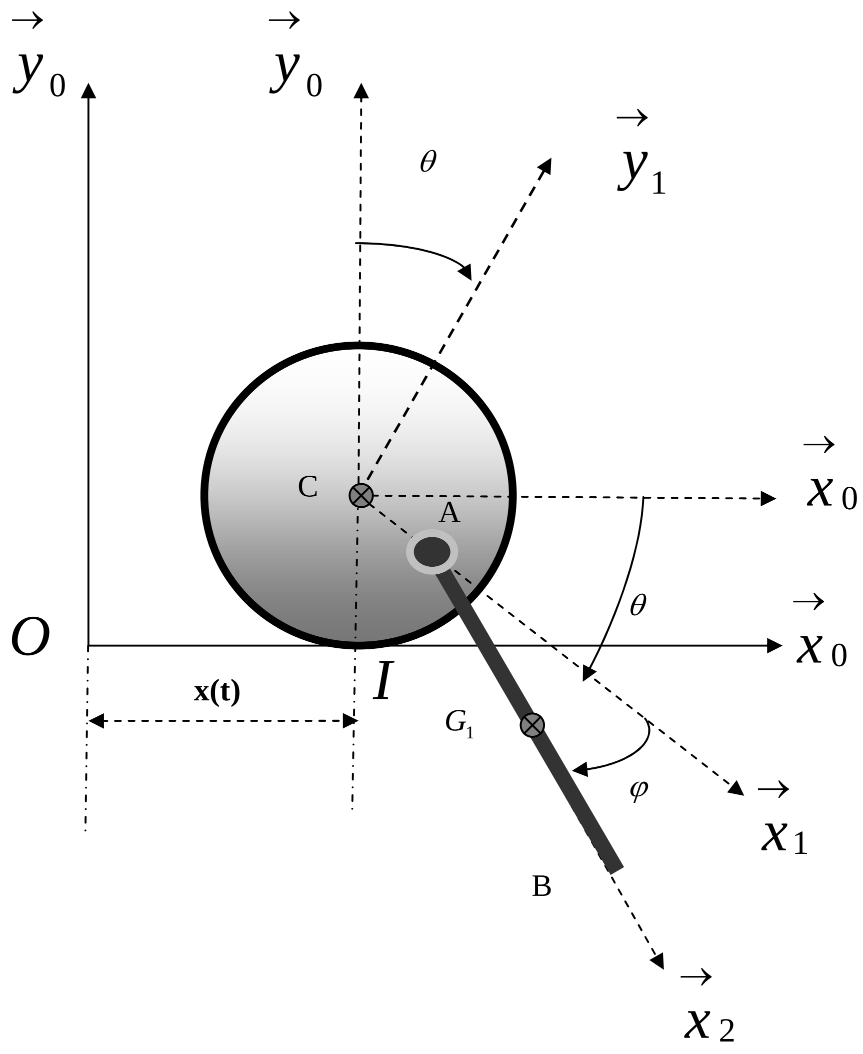
C : <u>Cinétique</u> : (*5 Points*)

Calculer **:**

C-1 : Le moment cinétique de (1) par rapport au repère R_0, au point C ;

C-2 : Le moment cinétique de (2) par rapport au repère R_0 , au point A ;

C-3 : L'énergie cinétique du système (1)+(2).


$\vec{y}_0$
$\vec{y}_0$
θ
$\vec{y}_1$
C
A
$\vec{x}_0$
θ
$\vec{x}_0$
O
I
x(t)
G_1
φ
$\vec{x}_1$
B
$\vec{x}_2$

Corrigé EMD02 : Mécanique rationnelle 02 juin 2008

A	Cinématique

1- Vitesses instantanées de rotation des solides S_1 et S_2 par rapport à R_0 :

$$\vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\theta}\,\vec{z}_1 \quad 0{,}5 \qquad ; \qquad \vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = -\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\vec{z}_1 \quad 0{,}5$$

2- vitesse absolue de C, par dérivation :

$$\overrightarrow{OC} = \begin{cases} x \\ R \\ 0 \end{cases}_{R_0} \quad 0{,}5 \qquad ; \qquad \vec{V}^0(C) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d^0}{dt}\begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0} = \begin{cases} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0} = \dot{x}\,\vec{x}_0 = \dot{x}(\cos\theta\,\vec{x}_1 + \sin\theta\,\vec{y}_1)$$

0,5 0,5

3- vitesse absolue du point A, par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CA} \quad 0{,}5 \qquad ; \qquad \vec{V}^0(A) = \begin{cases} \dot{x}\cos\theta \\ \dot{x}\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} \dot{x}\cos\theta \\ \dot{x}\sin\theta - a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1} \quad 0{,}5$$

4- condition de roulement sans glissement :

La vitesse de glissement du point I du disque par rapport au sol est :

$$\vec{V}(I\in 1/0) = \vec{V}^0(I\in 1) - \vec{V}^0(I\in 0) \quad 0{,}5$$

S'il n'y a pas glissement, on a alors : $\vec{V}^0(I\in 1) = \vec{V}^0(I\in 0) = \vec{0}$ 0,5

$$\vec{V}^0(I\in 1) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CI} = \begin{cases} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} 0 \\ -R \\ 0 \end{cases}_{R_0} = \begin{cases} \dot{x} - R\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \dot{x} - R\dot{\theta} = 0 \quad 1$$

5- vitesse absolue du point G_2, par la composition du mouvement :

$$\vec{V}^0(G_2) = \vec{V}^1(G_2) + \vec{V}_1^0(G_2) \quad 0.5$$

* vitesse relative de G_2 :

On a : $\overrightarrow{AG_2} = L\,\vec{x}_2 = L(\cos\varphi\,\vec{x}_1 - \sin\varphi\,\vec{y}_1) = \begin{cases} L\cos\varphi \\ -L\sin\varphi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$ 0.5

$$\vec{V}^1(G_2) = \frac{d^1\overrightarrow{AG_2}}{dt} = \begin{cases} -L\dot\varphi\sin\varphi \\ -L\dot\varphi\cos\varphi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$ 0.5 0.5

* <u>vitesse d'entraînement de G₂</u> :

$$\vec{V}_1^0(G_2) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{AG_2} \quad ;$$ 0.5

$$\vec{V}_1^0(G_1) = \begin{cases} \dot x\cos\theta \\ \dot x\sin\theta - a\dot\theta \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\dot\theta \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} L\cos\varphi \\ -L\sin\varphi \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} \dot x\cos\theta - L\dot\theta\sin\varphi \\ \dot x\sin\theta - a\dot\theta - L\dot\theta\cos\varphi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$ 0.5

D'où la vitesse absolue deG_1 :

$$\vec{V}^0(G_2) = \begin{cases} \dot x\cos\theta - L\left(\dot\theta + \dot\varphi\right)\sin\varphi \\ \dot x\sin\theta - a\dot\theta - L\left(\dot\theta + \dot\varphi\right)\cos\varphi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$ 0.5

6- accélérations relative et de Coriolis du point G_2 :

- accélération relative : $\vec{\gamma}^1(G_2) = \dfrac{d^1\overrightarrow{V^1(G_2)}}{dt} = \begin{cases} -L(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi) \\ -L(\ddot\varphi\cos\varphi - \dot\varphi^2\sin\varphi) \\ 0 \end{cases}_{R_1}$ 0.5 0.5

- accélération de

Coriolis : $\vec{\gamma}_C(G_2) = 2\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{V^1}(G_2) = 2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{Bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{Bmatrix} -L\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} -2L\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi \\ 2L\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_1}$ 0.5 0.5

B	Géométrie des masses

1- **Matrice d'inertie du disque au point C, dans R_1 :**

$$\overline{\overline{I_C}}(S_1) = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_1}$$ 1

2- **Matrice d'inertie de la barre au point C, dans R_2 :**

Le théorème de Huygens généralisé donne : $\overline{\overline{I_A}}(S_2) = \overline{\overline{I_{G_2}}}(S_2) + m\left[\overline{\overline{d^2}}\right]$ 0.5

$$\overline{\overline{I_A}}(S_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(2L)^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(2L)^2}{12} \end{bmatrix}_{R_2} + m\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}mL^2 \end{bmatrix}_{R_2}, avec\ \overrightarrow{AG_1} = \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$$ 1

3- **Moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe $\left(A, \overrightarrow{x_1}\right)$:**

$Ix_1x_1 = \vec{x}_1^{\,t}\, \overline{\overline{I_A}}(S_2).\vec{x}_1$ 0.5 $\quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$ 0.5

$$I_{Ax_1} = (\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}mL^2 \end{bmatrix}.\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3}mL^2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}mL^2\sin^2\varphi$$ 0.5

C	Cinétique

1- Moment cinétique de (1) par rapport au repère R₀ , au point C ;

$$\vec{\sigma}_C^0(S_1) = \overline{\overline{I_C}}\,\vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{MR^2}{2}\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

0,5

0,5

2- Le moment cinétique de (2) par rapport au repère R_0 , au point A ;

$$\vec{\sigma}_A^0(S_2) = \overline{\overline{I_A}}\,\vec{\Omega}_2^0 + m\,\vec{AG_2} \wedge \vec{V}_A^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3mL^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3mL^2}{4} \end{bmatrix}_{R_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right) \end{pmatrix}_{R_2} + m\,\underset{R_1}{\begin{cases} L\cos\varphi \\ -L\sin\varphi \\ 0 \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} \dot{x}\cos\theta \\ \dot{x}\sin\theta - a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

0,5

$$\vec{\sigma}_A^0(S_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3mL^2}{4}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right) \end{pmatrix}_{R_2} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ mL\,\dot{x}\cos\theta\sin\varphi + mL\,\dot{x}\sin\theta\cos\varphi - mL\,\dot{\theta}\cos\varphi \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}_A^0(S_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3mL^2}{4}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right) \end{pmatrix}_{R_1} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ mL\,\dot{x}\cos\theta\sin\varphi + mL\,\dot{x}\sin\theta\cos\varphi - mL\,\dot{\theta}\cos\varphi \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}_A^0(S_2) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{3mL^2}{4}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)+mL\,\dot{x}\sin(\theta+\varphi)-mL\,\dot{\theta}\cos\varphi \end{cases}_{R_1}$$

0,5

3- L'énergie cinétique du système (1)+(2) :

0,5

$$T^{(0)}(S_1+S_2)=T^{(0)}(S_1)+T^{(0)}(S_2)$$

$$T^{(0)}(S_1)=\frac{1}{2}M\left(\vec{V}_C^{(0)}\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0\,T}\,\overline{\overline{I_C}}\,\vec{\Omega}_1^0=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\dot{\theta}\end{pmatrix}_{R_1}\begin{bmatrix}\dfrac{MR^2}{4} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{MR^2}{4} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{MR^2}{2}\end{bmatrix}_{R_1}\begin{pmatrix}0\\0\\-\dot{\theta}\end{pmatrix}_{R_1}$$

0,5

$$T^{(0)}(S_1)=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2$$

0,5

$$T^{(0)}(S_2)=\frac{1}{2}m\left(\vec{V}_A^{(0)}\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^{0\,T}\,\overline{\overline{I_A}}\,\vec{\Omega}_2^0+m\left(\vec{V}_A^{(0)},\vec{\Omega}_2^0,\vec{AG}_2\right)$$

0,5

$$=\frac{1}{2}m\begin{pmatrix}\dot{x}\cos\theta\\ \dot{x}\sin\theta-a\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}^2+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\end{pmatrix}_{R_2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{4mL^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{4mL^2}{3}\end{bmatrix}_{R_2}\begin{pmatrix}0\\0\\-(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\end{pmatrix}_{R_2}$$

$$+m\begin{pmatrix}\dot{x}\cos\theta\\ \dot{x}\sin\theta-a\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}\bullet\left[\begin{pmatrix}0\\0\\-(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\end{pmatrix}_{R_1}\wedge\begin{pmatrix}L\cos\varphi\\ -L\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+a^2\dot{\theta}^2-2\dot{x}\dot{\theta}a\sin\theta\right)+\frac{2mL^2}{3}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2+m\begin{pmatrix}\dot{x}\cos\theta\\ \dot{x}\sin\theta-a\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}\bullet\begin{pmatrix}-L(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi\\ -L(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}$$

$$T^{(0)}(S_2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}a\sin\theta\right) + \frac{2mL^2}{3}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2 + mL(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\left(-\dot{x}\sin(\theta+\varphi) + a\dot{\theta}\cos\varphi\right)$$ 0,5

D'où : $$T^{(0)}(S_1+S_2) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}a\sin\theta\right) + \frac{2mL^2}{3}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2$$

$$+ mL(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\left(-\dot{x}\sin(\theta+\varphi) + a\dot{\theta}\cos\varphi\right)$$ 0,5